ЛЕКЦІЯ № 4

Інтеграли руху

Отже, ми отримали рівняння руху матеріальних точок у формі Ньютона та у формі Лагранжа. Причому, для знаходження лагранжевих рівнянь ми в тому чи іншому вигляді використовували постульовані рівняння Ньютона. Справедливість цих рівнянь повинна бути підкріплена експериментами. В першу чергу необхідно переконатися, що, наприклад, виконуються закони Кеплера. Але це завдання, навіть при наявності тільки активних сил, досить громіздка. Необхідно вирішувати 6 (за кількістю ступенів свободи системи двох тіл) нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Завдання спрощується при наявності **інтегралів руху**. Це – такі комбінації координат, швидкостей і часу, які від часу не залежать. У задачі про математичний маятник ми стикалися з такими інтегралами, як енергія і кутовий момент. Наявність інтегралів руху зменшує число ступенів вільності і відповідних рівнянь. Якщо в системі з N ступенями вільності є $\boldsymbol{k}$ незалежних інтегралів руху, то послідовно використовуючи їх і зменшуючи число залишилися координат. Скільки всього інтегралів руху може існувати?

Якщо система замкнута, і в рівняння руху час не входить явно, то для системи з N ступенями свободи, тобто з узагальненими координатами існують $2N-1$ інтегралів руху. Дійсно, динаміка такої системи повністю визначається завданням N початкових координат і N початкових швидкостей. Тому повне рішення має вигляд

$$q_i = q_i(t; q_{io}, \dot{q}_{io}). \tag{3.26}$$

Оскільки в замкнутій систем початок відліку часу вибраний довільним чином, то вибором $t-t_0$ можна перетворити $2N$ початкових координат і швидкостей до інших констант I_k, пов'язаних з цими початковими умовами. Разом з виразами для узагальнених швидкостей ми отримуємо систему алгебраїчних рівнянь, що зв'язують рішення для координат і швидкостей з цими константами.

Якщо обернути ці співвідношення, які є алгебраїчними рівняннями, і виразити константи I_k через рішення для координат і швидкостей

$$I_k = I_k\left(t-t_0, q_1(t), ..., q_N(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_N(t)\right) \tag{3.28}$$

то ми і знайдемо ці $2N-1$ **інтегралів руху**. Але вони в деякому сенсі є безглуздими, оскільки знаходяться після вирішення завдання. Нам необхідно знання якихось інтегралів руху ***до вирішення завдання***, щоб полегшити це завдання. Ці інтеграли знаходяться із загальних принципів механіки і пов'язані з певними симетріями. ***Симетріями*** називаються такі перетворення координат і часу, які не змінюють рівняння руху. Покажемо, що з принципів механіки можна визначити кілька очевидних інтегралів (всього їх 7), але крім того, можливі і додаткові інеграли руху, пов'язані з ***прихованими симетріями***. Особливо важливу роль відіграють так звані ***адитивні інтеграли руху***. Їх значення для системи, що складається з декількох частин, взаємодією між якими можна знехтувати, дорівнюють сумі значень цих інтегралів для кожної з систем окремо.

Повернемося до першого принципу механіки, згідно з яким наш час – однорідний, а простір – однорідний і ізотропний.

Однорідність часу та збереження енергії.

З принципу однорідності часу випливає, що якщо система замкнута, тобто на неї не діють зовнішні сили, які можуть змінюватися з часом, то час не може входити явно ні в рівняння руху, ні в функцію Лагранжа, тобто $L = L(q,\dot{q})$ і тому $\partial L/\partial t = 0$. Зауважимо, що однорідність часу ніяк не пов'язана з властивостями простору. Тому всі подальші міркування можна проводити відразу в рамках систем в узагальнених координатах q_i. Знайдемо повну зміну функції Лагранжа з часом.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} = \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{dq_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \end{aligned} . \qquad (3.29)$$

При перетворенні першого доданка ми врахували виконання рівнянь Лагранжа. Отримане співвідношення можна переписати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = 0 . \qquad (3.30)$$

Отже, що стоїть в дужках величина не залежить від часу і є інтегралом руху. Цей інтеграл руху називається ***енергією системи*:**

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \tag{3.31}$$

У випадку системи матеріальних точок **у декартових координатах** для лагранжіана у формі (3.25) енергія набуває очевидного звичного вигляду суми кінетичної та потенційної енергій:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r}_i). \tag{3.32}$$

Зауважимо, що добуток розмірності часу на розмірність енергії дає розмірність дії:

$$[t] \cdot [E] = [S]. \tag{3.33}$$

Але енергія може мати і не настільки очевидний вигляд. Як приклад розглянемо рівняння

$$i\dot{\psi} = \omega_0 \psi - |\psi|^2 \psi \ , \tag{3.34}$$

яке описує, наприклад, малоамплітудні обертання магнітного моменту або обертання симетричного вовчка. Як виглядає для цієї системи "енергія", що зберігається? На цьому прикладі ми бачимо зручність лагранжевого підходу. Будемо розглядати рівняння (3.34) як лагранжеві рівняння **для узагальнених координат** ψ **і** $\overline{\psi}$ (рисочки над комплексними величинами надалі будуть позначати комплексне спряження). Перш за все, треба знайти функцію Лагранжа, для якої рівняння (3.34) є лагранжевими. Можна перевірити, що лагранжіан системи має вигляд

$$L = \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}\overline{\psi} - \psi\dot{\overline{\psi}}\right) - \omega_0|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4. \tag{3.35}$$

(В якості вправи отримаєте з лагранжіана (3.35) лагранжеві рівняння (3.34)). За правилами (3.31) побудови виразу для енергії системи обчислюємо

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\psi}}} \dot{\overline{\psi}} - L = \omega_0 |\psi|^2 - \frac{1}{2} |\psi|^4. \tag{3.36}$$

Цей вираз виглядає на перший погляд дивно через відсутність "кінетичного" доданка, але причина цього буде з'ясована пізніше.

Збереження повної енергії системи не пов'язане із замкнутістю системи, а лише з відсутністю часу в лагранжіані системи. Зокрема, система може бути не замкнута і лагранжіан містити потенційну енергію, що не залежить від часу. В цьому випадку говорять про не замкнуту, але **консервативну систему**. Прикладами таких систем були розглянуті раніше плоский і сферичний математичні маятники. Лагранжіан сферичного маятника має вигляд

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) + mgl \cos \vartheta . \tag{3.37}$$

Енергія такої системи дорівнює

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\vartheta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - mglcos\vartheta . \tag{3.38}$$

На закінчення зауважимо, що **при переході до узагальнених координат** від вихідних декартових координат системи матеріальних точок, кінетична енергія перетворюється наступним чином (див. (2.20)):

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N-M} \sum_{s=1}^{3N-M} a_{ks}(q) \dot{q}_k \dot{q}_s , \qquad a_{ks} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} . \tag{3.39}$$

Таким чином, при такому перетворенні кінетична енергія залишається квадратичною формою узагальнених швидкостей і лагранжіан має вигляд

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N-M} \sum_{s=1}^{3N-M} a_{ks}(q) \dot{q}_k \dot{q}_s - U(q_i) . \tag{3.40}$$

Оскільки через однорідність функції T маємо $\sum (\partial L / \partial \dot{q}_i) \dot{q}_i = 2T$, то повна енергія системи точок зводиться до

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N-M} \sum_{s=1}^{3N-M} a_{ks}(q) \dot{q}_k \dot{q}_s + U(q_i) . \tag{3.41}$$

Однорідність простору і збереження імпульсу.

Повернемося до основних принципів механіки, зокрема, до **однорідності простору**. На відміну від попереднього випадку з однорідністю часу, це не означає, що координати не входять в лагранжіан системи. У разі взаємодіючих матеріальних точок потенційна енергія залежить від різниці координат точок $\vec{r}_i - \vec{r}_j$. Крім того, в разі врахування однорідності часу, воно не зачіпало координат, і розгляд можна було проводити в загальному випадку будь-яких узагальнених координат. Якщо ж ми говоримо про однорідність простору, то маємо на увазі простір, в якому задана певна, наприклад, декартова система координат (x, y, z). Саме при паралельному перенесенні цієї системи координат $(x, y, z) \to (x', y', z')$ на певний вектор властивості динаміки не повинні змінюватися. Тобто нижче розгляд ведеться не в узагальнених координатах, а в вихідних декартових. Розглянемо зміщення системи координат на нескінченно малий вектор $\vec{\varepsilon}$ (див.Рис.3.6).

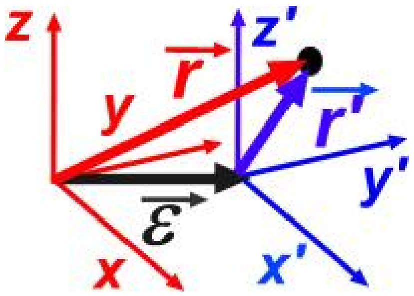

Рис.3.6. Зсув системи координат на вектор $\vec{\varepsilon}$.

З Рис. 3.6. видно зв'язок координат частинок в різних системах:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{\varepsilon}\,. \tag{3.42}$$

Важливо підкреслити, що це є **однопараметричне перетворення**: зміна координат **всіх** частинок відбувається на **одну** величину.

При такому зсуві координатної системи динаміка не повинна змінитися, а отже, і функція Лагранжа. Обчислимо її зміну

$$\delta L = L - L' = L(\vec{r}_i, \vec{v}_i) - L(\vec{r}_i', \vec{v}_i') = L(\vec{r}_i' + \vec{\varepsilon}, \vec{v}_i') - L(\vec{r}_i', \vec{v}_i') \approx$$

$$\approx \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \vec{\varepsilon} + O(\vec{\varepsilon}), \tag{3.43}$$

де доданки $O(\vec{\varepsilon})$ мають більш високий порядок малості по $\vec{\varepsilon}$. Оскільки зміна функції Лагранжа має бути нульовою при довільному значенні параметра, то скориставшись рівнянням Лагранжа, формулу (3.43) можна переписати так:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = 0\,. \tag{3.44}$$

Отже, зберігається величина

$$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \tag{3.45}$$

звана повним ***імпульсом системи***. З (3.45) видно адитивність імпульсу: він є сума величин $\partial L / \partial \vec{v}_i$, які визначають імпульси окремих частинок. Оскільки в декартових координатах кінетична енергія дорівнює $\sum m_i \vec{v}_i^2 / 2$, то імпульс кожної частинки дорівнює

$$\vec{p} = \partial L / \partial \vec{v}_i = m_i v_i, \tag{3.46}$$

тобто збігається зі звичайним визначення імпульсу у Ньютона. За аналогією зі звичайним імпульсів в декартових координатах можна ввести аналогічну величину в узагальнених координатах $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, звану ***узагальненим імпульсом***. Крім того, за аналогією зі звичайною силою $\vec{F}_i = -\partial U / \partial \vec{r}_i = \partial L / \partial \vec{r}_i$, вводиться узагальнена сила $F_i = \partial L / \partial q_i$. При цьому ми приходимо до звичайного запису рівняння Ньютона $\dot{p} = F$.

Зауважимо, що розмірність імпульсу є $г \cdot см / сек$, і отже

$$[L] \cdot [P] = [S], \tag{3.46}$$

тобто добуток розмірності простору (однорідність якого розглядається) на розмірність імпульсу, що зберігається, як і у випадку часу і енергії, дорівнює розмірності дії.

На закінчення звернемо увагу на наступне. Зі співвідношення $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{\varepsilon}$ випливає, що

$$L(\vec{r}_i) = L(\vec{r}_i' + \vec{\varepsilon}) \approx L(\vec{r}_i') + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\varepsilon}} \vec{\varepsilon} \; . \tag{3.47}$$

Тому імпульсу можна надати форму

$$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\varepsilon}} \, . \tag{3.48}$$

Другий множник в цьому добутку дорівнює одиниці і ми його не писали. Але такий запис підкреслює, що координати всіх частинок змінюються зі зміною одного параметра. В даному випадку цим параметром є кожна з трьох компонент вектора $\vec{\varepsilon}$.

Оскільки в визначення імпульсу входять тільки швидкості, але не координати, то при переході від однієї системи відліку до іншої, зрушеної на постійний вектор, повний імпульс не змінюється. Але якщо ми переходимо в систему відліку, що рухається відносно даної з постійною швидкістю (див. Рис.3.7), то величина повного імпульсу системи змінюється.

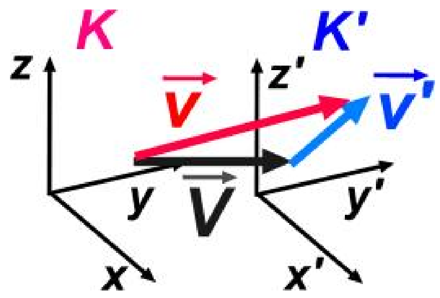

Рис.3.7. Перетворення швидкостей в різних інерційних системах.

Якщо система відліку K' рухається відносно вихідної системи відліку K зі швидкістю $\vec{V}$, то як видно з малюнка, співвідношення швидкостей в різних системах відліку дорівнює (перетворення Галілея):

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'. \qquad (3.49)$$

Підставляючи це співвідношення в вираз для імпульсу (3.46), отримуємо

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}' + \sum_i m_i \vec{V} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_i m_i = \vec{P}' + \mu \vec{V}, \qquad (3.50)$$

де μ – повна маса системи. Звідси видно, що якщо вибрати певну швидкість руху системи K' щодо даної, а саме

$$\vec{V} = \vec{P} / \mu, \qquad (3.51)$$

то в новій системі повний імпульс буде дорівнює нулю: $\vec{P}' = 0$. Вираз (3.51) можна переписати так:

$$\vec{V} = \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \vec{R}, \qquad (3.52)$$

де $\vec{R}$ – координата ***центру інерції*** системи. Зручно помістити центр системи координат системи центру інерції в точку $\vec{R}=0$. У випадку двох тіл центр інерції розташований на лінії, що з'єднує ці тіла, ближче до важкого. **Наприклад**, в разі Землі і Сонця центр інерції находися глибоко всередині Сонця на відстані 450 км від його центру при радіусі сонця в 700 000 км.а в разі Юпітера центр інерції системи Сонце-Юпітер знаходиться за межами поверхні Сонця.

При завданні початкових умов для системи матеріальних точок ми маємо значення мас цих точок m_i, їх координат $\vec{r}_i$ і швидкостей $\vec{v}_i$. Далі послідовність дій така:

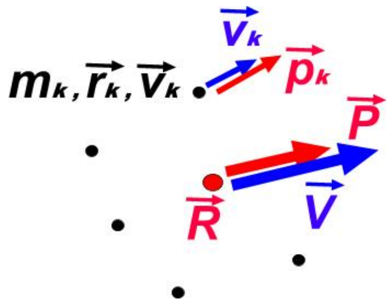

Рис.3.8. Знаходження швидкості переміщення системи центру інерції.

1. Знаючи величини мас m_i і координат $\vec{r}_i$ за формулою

$$\vec{R}=\frac{1}{\mu}\sum_i m_i\vec{r}_i \tag{3.53}$$

знаходимо положення центру інерції системи (червона точка на Рис.3.8).

2. Знаючи величини мас m_i і швидкостей $\vec{v}_i$ за формулою (3.46) знаходимо повний імпульс системи $\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i$.

3. Розділивши значення повного імпульсу на повну масу μ, знаходимо швидкість $\vec{V}$ переміщення точки центру інерції.

Зручність переходу в систему центру інерції пов'язано з простотою перетворення енергії при цьому. Енергія у вихідній системі дорівнює

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2}\vec{v}_i^{\,2} + U\left(\vec{r}_k - \vec{r}_s\right) =$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\vec{v}_i'^{\,2} + 2\vec{v}_i'\vec{V} + \vec{V}^{\,2}\right) + U\left(\vec{r}_k' - \vec{r}_s'\right) =$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\vec{v}_i'^{\,2} + U\left(\vec{r}_k' - \vec{r}_s''\right) + \frac{\mu\vec{V}^{\,2}}{2} + \vec{V}\sum_i m_i\vec{v}_i' =$$

$$= E'_{вн} + \frac{\mu\vec{V}^{\,2}}{2} + \vec{V}\vec{P}' \qquad . \qquad (3.54)$$

Якщо в системі K' повний імпульс дорівнює нулю $\vec{P} = 0$, то енергія системи складається з її кінетичної енергії руху як ціле, і ***внутрішньої енергії***:

$$E = \frac{\mu\vec{V}^{\,2}}{2} + E'_{вн} \,. \qquad (3.55)$$

Ізотропія простору та збереження моменту імпульсу.

Перший принцип механіки постулює також ізотропію простору. Це означає, що якщо система замкнута, то **поворот всієї системи** на довільний кут навколо довільної осі в просторі не повинен змінювати її стану і механічних властивостей. (Це – те ж саме, що і поворот системи координат на цей кут в зворотному напрямку). Розглянемо такий поворот на нескінченно малий кут. Як зазначалося вище, довільний поворот системи координат в просторі характеризується трьома кутами. Завжди можна вибрати вектор в просторі, затиснувши його двома кутами щодо осей вихідної системи координат, і кут обертання навколо цієї осі (Рис.3.9)

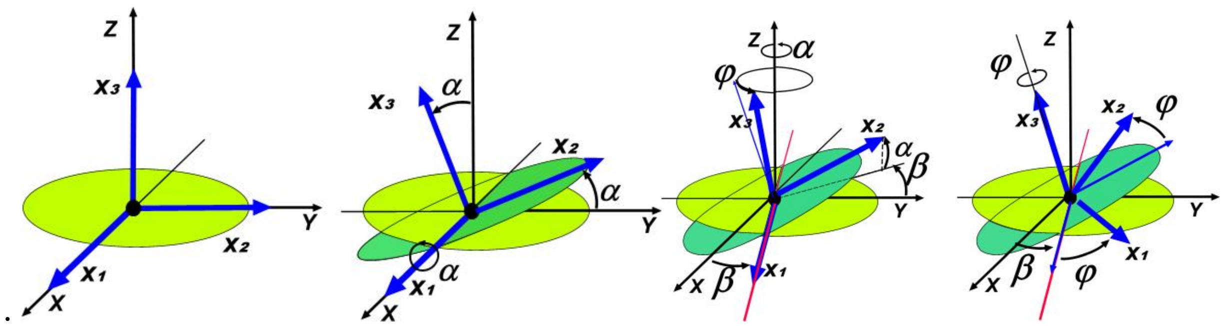

Рис.3.9. Обертання системи координат в тривимірному просторі.

Розглянемо окремо останній поворот на кут ϕ, в якості якого візьмемо нескінченно малий поворот точки (див.3.10) навколо осі, напрямок якої позначимо одиничним вектором $\overline{n}$.

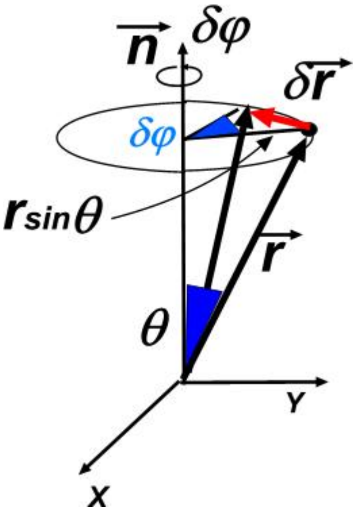

Рис.3.10. Нескінченно малий поворот точки.

З малюнка видно, що довжина вектора повороту при $\delta\phi << 1$ наближено дорівнює

$$\delta r = r \sin\vartheta\, \delta\phi \,. \tag{3.56}$$

Якщо ввести векторну величину кута повороту $\delta\vec{\phi} = \vec{n}\,\delta\phi$, то можна записати зміну вектора при повороті, як

$$\delta\vec{r} = \left[\delta\vec{\phi}\,\vec{r}\right]. \tag{3.57}$$

При повороте меняются не только радиус-векторы всех частиц, но и их скорости. Продифференцируем (3.57) по времени и получим

$$\delta\vec{v} = \left[\delta\vec{\phi}\,\vec{v}\right]. \tag{3.58}$$

Заметим, что это касается и всех других векторов при повороте (см. Рис.3.11).

Внаслідок ізотропії простору при повороті системи (тобто всіх матеріальних точок одночасно) на нескінченно малий кут функція Лагранжа не повинна змінитися. Випишемо цю умову:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\delta\vec{v}_i \right) = 0\,, \tag{3.59}$$

і підставимо в нього вирази (3.57) і (3.58). Врахуємо, що у формулі (3.59) $\partial L / \partial \vec{v}_i = \vec{p}_i$, а з рівняння Лагранжа $\partial L / \partial \vec{r}_i = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \dot{\vec{p}}_i$. Отримуємо

$$\sum_i \left(\dot{\vec{p}}_i \left[\delta\vec{\phi}\, \vec{r}_i \right] + \vec{p}_i \left[\delta\vec{\phi}\, \dot{\vec{r}}_i \right] \right) = 0 . \tag{3.60}$$

Після циклічних перестановок у векторному добутку перетворимо цей вираз:

$$\delta\vec{\phi} \sum_i \left(\left[\vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i \right] + \left[\dot{\vec{r}}_i \vec{p}_i \right] \right) = \delta\vec{\phi} \frac{d}{dt} \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{p}_i \right] = 0 , \tag{3.61}$$

і зводимо ліву частину до повної похідної за часом від функції $\sum_i \left[\vec{r}_i \vec{p}_i \right]$:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{p}_i \right] = 0 . \tag{3.62}$$

Величина, що зберігається

$$\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{p}_i \right] \tag{3.63}$$

називається ***моментом імпульсу або кутовим моментом***. Кутовий момент має розмірність дії. Відповідна симетрія пов'язана з безрозмірним кутом повороту ϕ. Таким чином, як і в попередніх випадках, зберігається величина «компліментарна» характеристиці відповідної симетрії:

$$[\phi][M] = [S] . \tag{3.64}$$

У попередньому випадку розгляду імпульсу, ця величина залежала тільки від швидкості, і тому імпульс перетворювався тільки при переході між системами відліку, що рухаються відносно один одного, і не залежав від положення центру системи. В даному випадку кутового моменту, він залежить і від швидкостей і від координат. Тому ця величина залежить і від вибору центру координатної системи.

Якщо система K' зміщена щодо системи K на вектор $\vec{a}$, то $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ і моменти в двох системах пов'язані так (див.Рис.3.12):

$$\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{p}_i \right] = \sum_i \left[\vec{r}_i' \vec{p}_i \right] + \sum_i \left[\vec{a} \vec{p}_i \right] = \vec{M}' + \left[\vec{a} \vec{P} \right] . \tag{3.65}$$

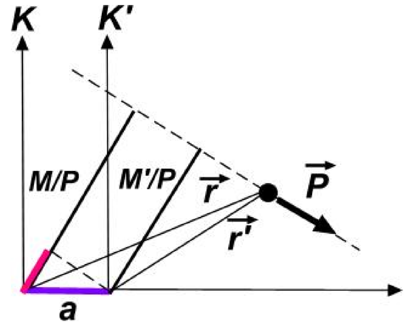

Рис.3.12. Момент інерції в зміщенних системах відліку. Червоним позначена різниця моментів.

Якщо системи K і K' рухаються один щодо одного зі швидкістю $\vec{V}$, тобто $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$, то можна взяти їх положення в момент, коли центри систем збігаються і перетворюються тільки швидкості:

$$\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{p}_i\right] = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i \vec{v}_i\right] = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i \vec{v}'_i\right] + \left[\sum_i m_i \vec{r}_i, \vec{V}\right] = \vec{M}' + \mu\left[\vec{R}\vec{V}\right]. \qquad (3.66)$$

Цей вираз спрощується, якщо система K' – це система центру інерції. Тільки в цьому випадку $\mu\vec{V} = \vec{P}$, де-повний імпульс, і

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left[\vec{R}\vec{P}\right]. \qquad (3.67)$$

Ця ситуація зображена на Рис.3.13.

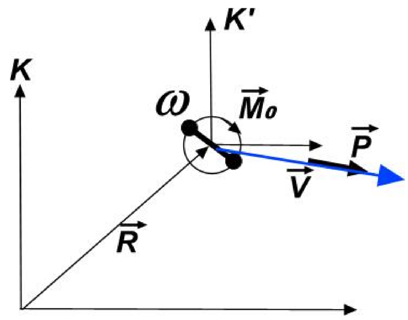

Рис.3.13. Рух системи центру інерції щодо лабораторної системи.

Повернемося до визначення моменту імпульсу (3.63). У такому записі він виглядає інакше, ніж розглянуті раніше інтеграли руху. Частина енергії виглядає наступним чином $\Delta E = \sum_i \left(\partial L / \partial \dot{q}_i\right)\left(\partial q_i / dt\right)$, де t – параметр однопараметричного перетворення всіх узагальнених координат. Повний імпульс також може бути записаний в подібній формі (див.3.48): $\vec{P} = \sum_i \left(\partial L / \partial \dot{\vec{r}}_i\right)\left(\partial \vec{r}_i / \partial \vec{\varepsilon}\right)$, де $\vec{\varepsilon}$ – параметр однопараметричного перетворення.

У разі кутового моменту параметром перетворення є кут, і в його термінах треба висловити величину моменту. Розглянемо $z-$проекцію кутового моменту системи точок і випишемо її в полярних координатах $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, пов'язаних з цією віссю:

$$M_z = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i \dot{\vec{r}}_i\right]_z = \sum_i m_i \left(x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i\right) = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\phi}_i \,. \qquad (3.68)$$

З іншого боку, функція Лагранжа системи матеріальних точок у полярних координатах виглядає так:

$$L = \sum_i m_i \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_i^2\right)/2 - U = \sum_i m_i \left(\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\phi}_i^2\right)/2 - U = L\left(\dot{\phi}_i, r_i, \dot{r}_i\right). \qquad (3.69)$$

В даному випадку полярні координати r і ϕ грають роль узагальнених координат. За загальними правилами знайдемо узагальнений імпульс, відповідний узагальненої координаті ϕ в лагранжіані. Узагальнений імпульс, що відповідає кутовій змінній кожної частинки дорівнює $p_{\phi,i} = \partial L / \partial \dot{\phi}_i = m_i r_i^2 \dot{\phi}_i$. Повний узагальнений $\phi-$імпульс дорівнює

$$P_\phi = \sum_i p_{\phi,i} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\phi}_i = M_z \,. \qquad (3.70)$$

Таким чином, кутовий момент можна представити у вигляді

$$M_z = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \,. \qquad (3.71)$$

Збереження цієї величини пов'язано з інваріантністю системи щодо повороту всі системи на довільний кут ψ навколо осі z. При такому повороті зміни всіх полярних кутів частинок однакові і виконується співвідношення $d\phi_i / d\psi = 1$. Цей формальний множник, що описує симетрію обертання, можна вписати до виразу (3.71).

Таким чином, усі досліджені інтеграли руху мають схожу структуру. Як ми побачимо на наступній лекції – це часткова форма загального вигляду інтегралу руху, який виникає симетрії, що задовільняє деякому однопараметричному перетворенню.